

Winkelfunktionen und der Goldene Schnitt

In der folgenden Aufstellung sind alle durch drei teilbaren Winkel der Sinus-Funktion in Abhängigkeit vom Goldenen Schnitt Φ dargestellt. Aus logischen Gründen können gleichfalls alle Cosinus- und Tangens-Werte durch Φ ausgedrückt werden. Zusätzlich kann jeder dargestellte formelmäßige Zusammenhang weiter umgewandelt werden, wenn Φ durch $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ersetzt wird. Für einige Winkel wurde diese Umrechnung vorgenommen.

Besonders interessant ist die Darstellung für die Winkel von 15° und 75° , die in allen mathematischen Tabellenbüchern fehlen:

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{2 - \sqrt{3}}) \text{ und}$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{2 + \sqrt{3}})$$

$$\tan 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \text{ und}$$

$$\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \frac{1}{2}(\Phi\sqrt{3} + \sqrt{3 - \Phi})}$$

$$\sin 6^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{3(2 - \Phi)} - \Phi = \sin 66^\circ - \frac{\Phi}{2}$$

$$\sin 9^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{\Phi + 2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})} \right)}$$

$$\sin 12^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{\Phi + 2} - \frac{1}{\Phi} \sqrt{3})$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \frac{\sqrt{6 - 3\Phi}}{\Phi - 1}} = \frac{1}{2} (\sqrt{2 - \sqrt{3}})$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}}$$

$$\sin 21^\circ = \frac{1}{4} \left(\sqrt{2 + \sqrt{\Phi + 2}} - \sqrt{3(2 - \sqrt{\Phi + 2})} \right)$$

$$\sin 24^\circ = \frac{1}{4} (\Phi\sqrt{3} - \sqrt{3 - \Phi})$$

$$\sin 27^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3 - \Phi}}$$

$$\sin 30^\circ = \Phi - \frac{1}{2} \sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 33^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \frac{1}{2}(\Phi\sqrt{3} - \sqrt{3 - \Phi})}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \Phi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})} = \frac{1}{\Phi} \sin 72^\circ$$

$$\sin 39^\circ = \frac{1}{4} \left(\sqrt{2 + \sqrt{\Phi + 2}} + \sqrt{3(2 - \sqrt{\Phi + 2})} \right)$$

$$\sin 42^\circ = \frac{1}{4} \left(3\sqrt{\Phi + 2} - \frac{1}{\Phi} \right)$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2} (\Phi^2 + \sqrt{\Phi + 2} \times \sqrt{2 - \sqrt{\Phi + 2}}) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\sin 48^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{\Phi + 2} + \frac{1}{\Phi} \sqrt{3})$$

$$\sin 51^\circ = \frac{1}{4} \left(-\sqrt{2 - \sqrt{\Phi + 2}} + \sqrt{3(2 + \sqrt{\Phi + 2})} \right)$$

$$\sin 54^\circ = \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}} = \sin 18^\circ + \sin 30^\circ$$

$$\sin 57^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \frac{1}{2} (\Phi \sqrt{3} - \sqrt{3 - \Phi})}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6-3\Phi}}{2(\Phi-1)} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\sin 63^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3 - \Phi}}$$

$$\sin 66^\circ = \frac{1}{4} (\Phi + \sqrt{3(3 - \Phi)})$$

$$\sin 69^\circ = \frac{1}{4} \left(\sqrt{2 - \sqrt{\Phi + 2}} + \sqrt{3(2 + \sqrt{\Phi + 2})} \right)$$

$$\sin 72^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\Phi + 2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (5 + \sqrt{5})}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \frac{\sqrt{6-3\Phi}}{\Phi-1}} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\sin 78^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{3(\Phi + 2)} + \frac{1}{\Phi})$$

$$\sin 81^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{\Phi + 2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (5 + \sqrt{5})} \right)}$$

$$\sin 84^\circ = \frac{1}{4} (\Phi \sqrt{3} + \sqrt{3 - \Phi})$$

$$\sin 87^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \frac{1}{2} (\Phi \sqrt{3} + \sqrt{3 - \Phi})}$$

$$\sin 90^\circ = \Phi^2 - \Phi = 1$$

$$\Phi = \frac{\sin 6^\circ + \sin 78^\circ}{\sin 42^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 12^\circ + \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 12^\circ + \sin 84^\circ}{\sin 48^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 18^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 24^\circ + \sin 84^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 30^\circ + \sin 78^\circ}{\sin 66^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 36^\circ + \sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 42^\circ + \sin 66^\circ}{\sin 78^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 48^\circ + \sin 60^\circ}{\sin 84^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 48^\circ - \sin 24^\circ}{\sin 12^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 60^\circ - \sin 12^\circ}{\sin 24^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 78^\circ - \sin 54^\circ}{\sin 6^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 66^\circ - \sin 6^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\cos 66^\circ + \cos 6^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\Phi = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 30^\circ} + 1$$

$$\Phi = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\sin 78^\circ - \sin 42^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\Phi^2 = \frac{\sin 18^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 18^\circ}$$

$$\Phi^2 = \frac{\sin 30^\circ + \sin 54^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\Phi^2 = \frac{\sin 36^\circ + \sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}$$

$$\Phi^2 = \frac{\sin 72^\circ + \sin 84^\circ}{\sin 48^\circ}$$