Die ungewöhnliche Zahlenfolge

Als Ausgangspunkt dient jene „berühmte“ Formel, von welcher der Goldene Schnitt abgeleitet wurde. Diese lautet:

$$\Phi = \ldots\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}} \qquad (1)$$

Diese wird nun in der allgemeinen Form wie folgt geschrieben;

$$z = \ldots\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{a}}}}} \qquad (2)$$

Überraschend ist, das bei jeder x-beliebigen Zahl „a“ stets das gleiche Ergebnis herauskommt. Das heißt, lediglich der Faktor b bestimmt das Endergebnis.

Ein sehr interessantes Ergebnis erhält man bei a = b = 0,5, also

$$z = \ldots\sqrt{0{,}5+\sqrt{0{,}5+\sqrt{0{,}5+\sqrt{0{,}5+\sqrt{0{,}5}}}}} \qquad (3)$$

Relativ schnell nähert sich das Ergebnis z dem Grenzwert **1,3660254...**, welcher besondere Eigenschaften aufweist. Zuvor soll der Wert z + 0,5 betrachtet werden, der zu z_1= 1,8660254... gleich dem Quadrat von z (!) führt. Dieser Betrag entspricht exakt s**in60°+1**.

Der zuerst genannte Wert enthüllt seine Besonderheit erst dann, wenn man eine reziproke Zahlenfolge aufstellt.

$\frac{1}{1{,}3660254...} = 0{,}73205080... = \sqrt{3}-1$

$1+0{,}73205080 = 1{,}73205080 = \sqrt{3}$

$\sqrt{3}+1 = 2{,}73205080...$

$\frac{1}{2{,}73205080...} = 0{,}3660254...$

0,3660254...+ 1 = **1,3660254...**

womit wir wieder bei dem ermittelten Grenzwert sind und der „Spaß“ wieder von vorn beginnt. Teilt man 1,3660254.. durch 0,3660254.., führt dies zu 3,7320508...(= 2+$\sqrt{3}$)!

Allerdings ist das noch nicht das letzte Ungewöhnliche. Man kann die Folge auch anders aufbauen:

Tabelle 1

1	$\frac{1}{0{,}3660254...}$	0,7320508...	+1	=	1,7320508... $=\sqrt{3}$
2	$\frac{1}{1{,}7320508...}$	0,5773502...	+1	=	1,5773502...
3	$\frac{1}{1{,}5773502...}$	**0,6339745**...	+1	=	1,6339745...
4	$\frac{1}{1{,}6339745...}$	0,6120046...	+1	=	1,6120046...
5	$\frac{1}{1{,}6120046...}$	0,6203456...	+1	=	1,6203456...
6	$\frac{1}{1{,}6203456...}$	0,6171522...	+1	=	1,6171522...
7	$\frac{1}{1{,}6171522...}$	0,6183709...	+1	=	1,6183709...
8	$\frac{1}{1{,}6183709...}$	0,6179053...	+1	=	1,6179053...
9	$\frac{1}{1{,}617905...}$	0,6180831...	+1	=	1,6180831...
	...	...	+1	=	...
n	$\frac{1}{\Phi}$!	0,6180339...	+1	=	Φ!

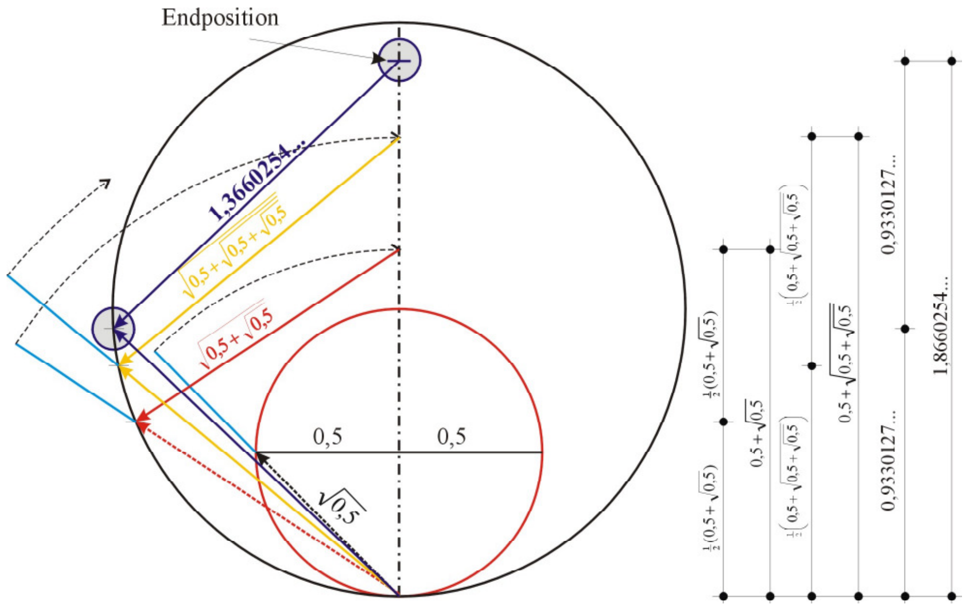
Auf diese Weise ist erkennbar, dass man aus der obigen Formel (3) im weiteren Fortgang sowohl 0,732...= $\sqrt{3}-1$, 1,732... = $\sqrt{3}$ und 2,732... = $\sqrt{3}+1$, wie auch den Wert des Goldenen Schnittes ableiten kann. Diese Zusammenhänge müssen etwas mit Genesis zu tun haben, auch wenn das für uns gegenwärtig noch unverständlich bleibt. Aber es ist auffallend, dass wir aus einer einzigen Folge zu solch faszinierenden Daten gelangen können.

In der obigen Tabelle habe ich in der 3. Zeile die Zahl **<u>0,6339745</u>**... fett geschrieben und unterstrichen. Diese Zahl kann auch aus der Formel $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ absolut identisch abgeleitet werden. Kurios ist, dass die Addition mit 1,3660254... zu exakt 2,0 führt.

Die obige Folge (2) kann man auch geometrisch mit einer Pendelbewegung erzeugen. Die Lösung weist gewisse Parallelen zu jenem Verfahren auf, welches ich bei der Ermittlung von Φ im Einheitskreis gefunden hatte[1]. Allerdings ist der Ausgangspunkt ein Kreis mit dem Radius 0,5, der am "Fuße" eines Einheitskreises angeordnet ist.

Das Ganze sieht so aus:

Abbildung 1



Da bekanntlich 0,5 das Selbe wie $\frac{1}{2}$ ist, spielt die Hälfte auch bei der Konstruktion eine Rolle. Im kleinen Kreis beginnend erhält man die erste Länge $\sqrt{0,5}$, die um den Radius 0,5 (hellblaue Linie) erweitert wird. Der Kreisbogen zur Längshauptachse markiert die neu entstandene Länge $0,5+\sqrt{0,5}$. Die Hälfte davon markiert auf dem äußeren Einheitskreis einen Punkt, dessen <u>beide</u> Verbindungslinien (auch die rot gestrichelte Linie) zur Hauptachse die Größe $\sqrt{0,5+\sqrt{0,5}}$ besitzen. Das ist insofern ungewöhnlich, da das Produkt der beiden neu entstandenen Seiten die erwähnte Länge von $0,5+\sqrt{0,5}$ ergibt. Diese Eigenschaft wird auch bei allen nachfolgenden Schritten bis n→ unendlich beibehalten.

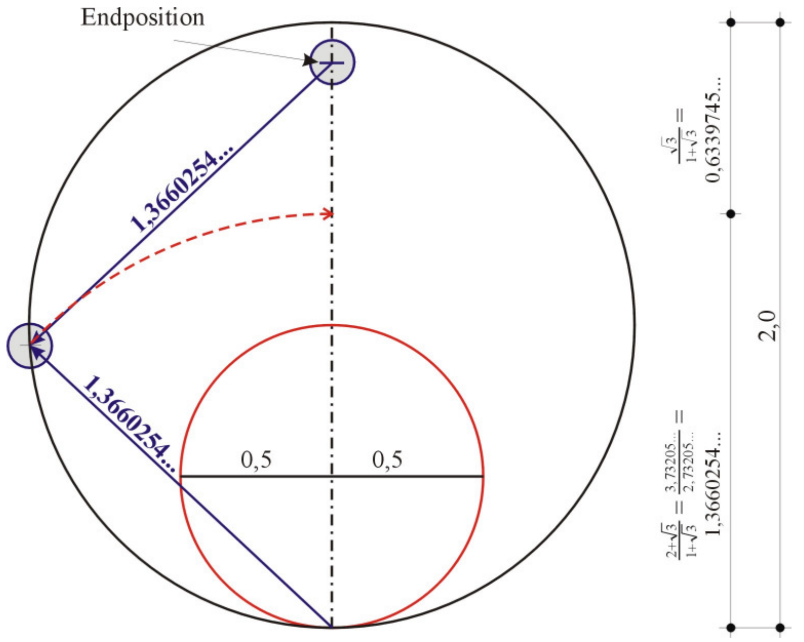
Nun wird die (rot gestrichelte Linie) am Halbierungspunkt auf dem äußeren Kreis wieder um 0,5 verlängert und dann beginnt das gleiche Spiel wie vorher. Die ganze Konstruktion „frisst" sich an den beiden grau hinterlegten Punkten fest, um dort den Grenzwert der Funktion zu erzeugen.

Zu guter letzt ergibt sich folgendes Bild:

---

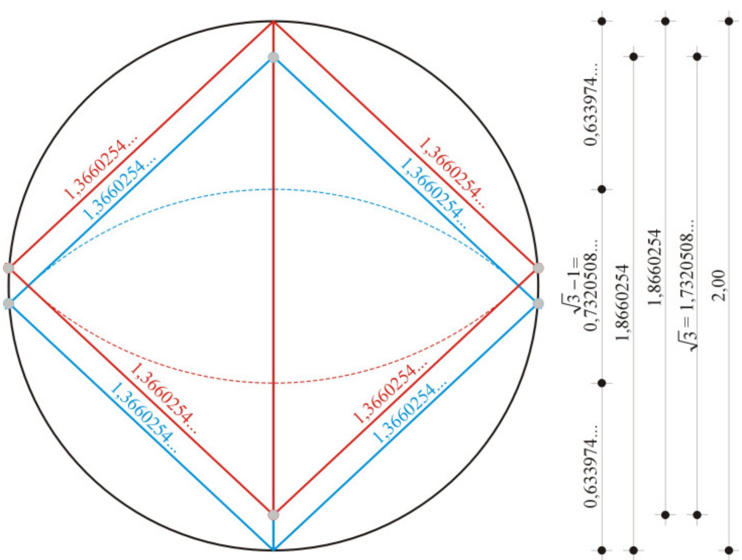
[1] Axel Klitzke: „Die kosmische 6"

Abbildung 2



Der obere Abstand von 0,6339745... , der sich als Differenz zum Radius von 1,3660254... ergibt, scheint dann wieder der Ausgangspunkt zu sein, Φ grafisch auf einem völlig neuem Weg (ableitend von den Aussagen aus Tabelle 1) zu bestimmen. Die ersten Schritte lassen sich sogar nachvollziehen. Erzeugt man den oben gezeigten Prozess doppelt spiegelbildlich, erhält man das nachfolgende Bild:

Abbildung 3



Zur Erklärung sei erwähnt: Die beiden Kreissegmente besitzen den Radius 1,3660254... und besitzen ihren jeweiligen Kreismittelpunkt an den Endpunkten der vertikalen Linie. Der mittige Abstand dieser Kreissegmente entspricht dem reziproken Wert des Radius:

$$\frac{1}{1{,}3660254...} = 0{,}7320508... = \sqrt{3} - 1\,(!)$$

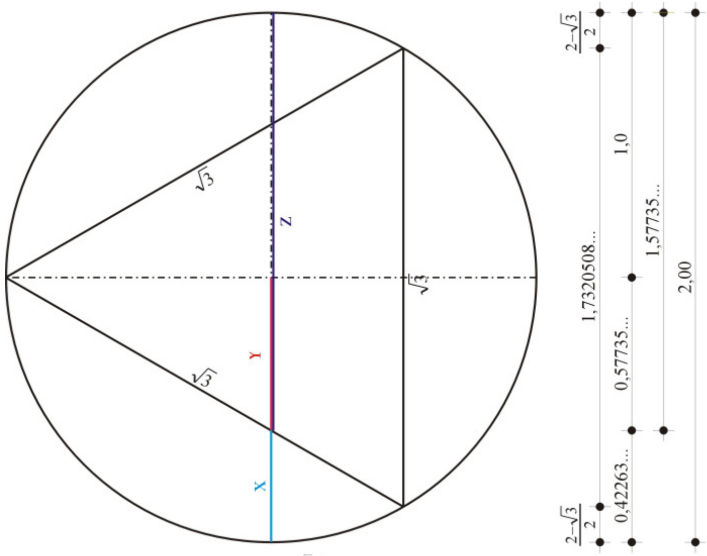
während die beiden verbleibenden Abschnitte die Größe $0{,}6339745... = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ besitzen. Die Proportion beider Größen ergibt:

$$\frac{0{,}6339745...}{0{,}7320508...} = 0{,}8660254 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60°\ (!)$$

Das Ungewöhnliche stellt jedoch dar, dass gleichfalls die Größe von $\sqrt{3}$ als Längenabschnitt zwischen den beiden auf der vertikalen Achse befindlichen Punkten entsteht. Somit überrascht diese Konstruktion mit einem globalen Phänomen, welches insgesamt äußerst ungewöhnliche Teilergebnisse nach sich zieht.

In einem nächsten Schritt wird die Linie mit der Länge $\sqrt{3}$ zum Rand parallelverschoben, so dass ein gleichseitiges Dreieck mit dieser Länge konstruiert werden kann. Auf der vertikalen Mittelachse lassen sich die beiden Abschnitte x und y ableiten.

Abbildung 4



$x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = 0{,}4226397...$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773502...$

Der Wert y = 05773502... $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ entspricht nichts anderem als dem reziproken Wert von $\sqrt{3}$. Sein äußerer Ergänzungsabschnitt x = 0,4226397 kann auch als $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ ausgedrückt werden. Die Proportion beider Werte ergibt: $\frac{y}{x} = 1{,}3660254... = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$, womit erneut jener Wert auftaucht, der aus der Formel (3) abgeleitet wurde.

Zu erwähnen ist noch, dass aus dieser Konstruktion der nächste Wert (aus Tabelle 1) = 1,5773502... $= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ entsteht, der nichts anderes als der Größe $\frac{1}{0{,}6339745...}$ entspricht. Somit hat sich zumindest ein erster Kreislauf geschlossen, der über die Formel (3) und den Abbildungen 1 bis 4 die folgenden Werte verbindet:

$$\mathbf{0{,}6339745... + 1{,}3660254... = 2{,}0 \text{ sowie } \sqrt{3}}$$

Inwieweit eine Fortsetzung der grafischen Lösung bis zu Φ möglich ist, lässt sich gegenwärtig noch nicht sagen.

Insgesamt liegt die Vermutung nahe, dass in dieser Konstruktion noch eine ganze Reihe kosmischer Geheimnisse verborgen sind. Eines davon ist die Solarkonstante mit 1,366 kW/m²!

Ein anderer gefundener profaner Wert lautet für die Bildschirmauflösung eines Plasmafernsehers 1.366 x 768 Pixel. Wer gerade diese Größe festgelegt hat, bleibt aktuell für mich ein Rätsel.

April 2006

Ergänzungen: 14. Januar 2008

A. Klitzke

Axel Klitzke